**2023-2024学年度上学期期末考试高三年级数学试卷**

**辽宁省实验中学**

**命题人：刘铭 校对人：刘铭**

**一. 选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知，均为集合的子集， ，，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】由，先求出，再由，，可得集合.

【详解】，均为集合的子集，，则，

，，则.

故选：B

2. ，则的共轭复数等于（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算，然后根据共轭复数的概念求解即可；

【详解】，

故选：D.

3. 若，，则（ ）

A.  B. 

C  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】两式分别平方，相加后结合同角三角函数关系式及两角和的余弦公式化简可得.

【详解】由，，

得，，

相加得，，

解得，

故选：B.

4. 的展开式中的系数为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由题意可知项可由与相加可得，化简即可.

【详解】可知项可由与相加可得，

即，

故选：A.

5. 设，，，则的最小值为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用基本不等式求解即可.

【详解】，，

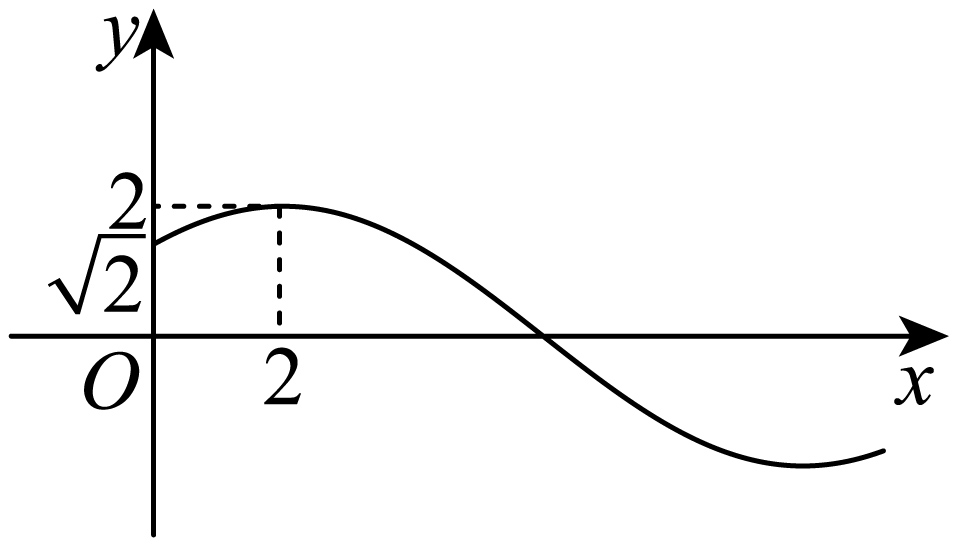
.

当且仅当即，时等号成立，

所以的最小值为.

故选：D.

6. 函数的部分图象如图，则（ ）



A. ， B. ，

C. ， D. ，

【答案】A

【解析】

【分析】代入两点坐标，结合2为函数在原点右边的第一个最大值点，求出相应的答案.

【详解】由图象可得，故，

因为，故或，

将代入解析式得，即，

由图象可知2为函数在原点右边的第一个最大值点，

故，

当时，，解得，满足要求，

当时，，解得，不合要求，舍去，

故选：A

7. 已知函数，设甲：；乙：是奇函数. 则（ ）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据奇函数的性质即可求解，结合充要条件的定义即可判断.

【详解】若是奇函数，则，

故，

进而可得对定义域内的任意恒成立，故，

当时，定义域为，关于原点对称，易得,因此是奇函数,故甲是乙的充要条件，

故选：C

8. 圆锥曲线的发现与研究起源于古希腊，阿波罗尼奥斯（前262-前190）的《圆锥曲线论》全书8篇，共487个命题. 16世纪天文学和物理学揭示了圆锥曲线是自然界物体运动的普遍性形式. 17、18世纪随着射影几何学和解析几何学的创立发展，18世纪40年代瑞士数学家欧拉给出了现代形式下圆锥曲线的系统阐述. 现有圆锥顶点为，底面圆心为，母线与底面直径的长度相同. 点在侧面上，点在底面圆周上，为底面直径，二面角为. 已知平面与圆锥侧面的交线是某椭圆的一部分，则该椭圆的离心率为（ ）

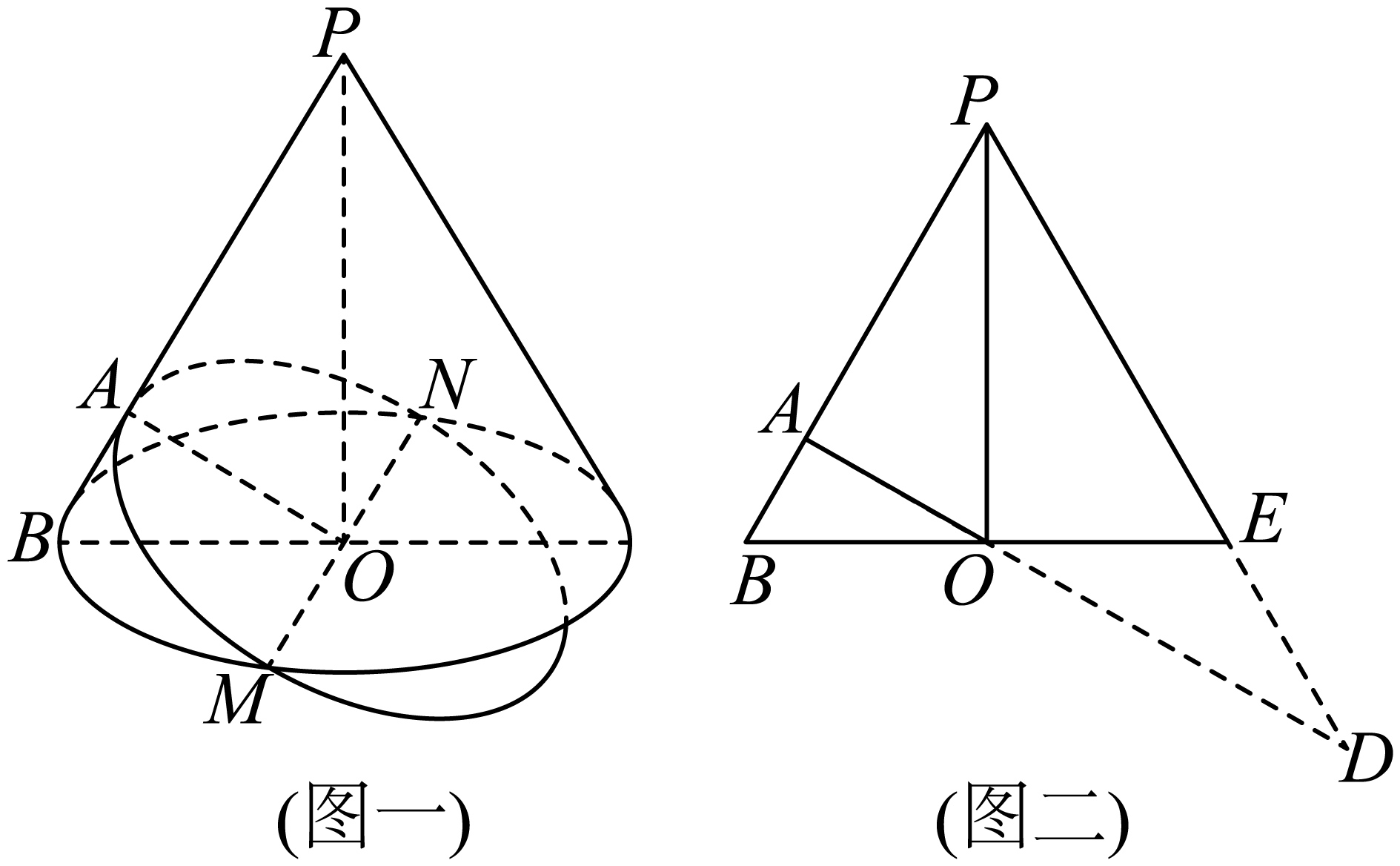
A.  B.  C.  D. 

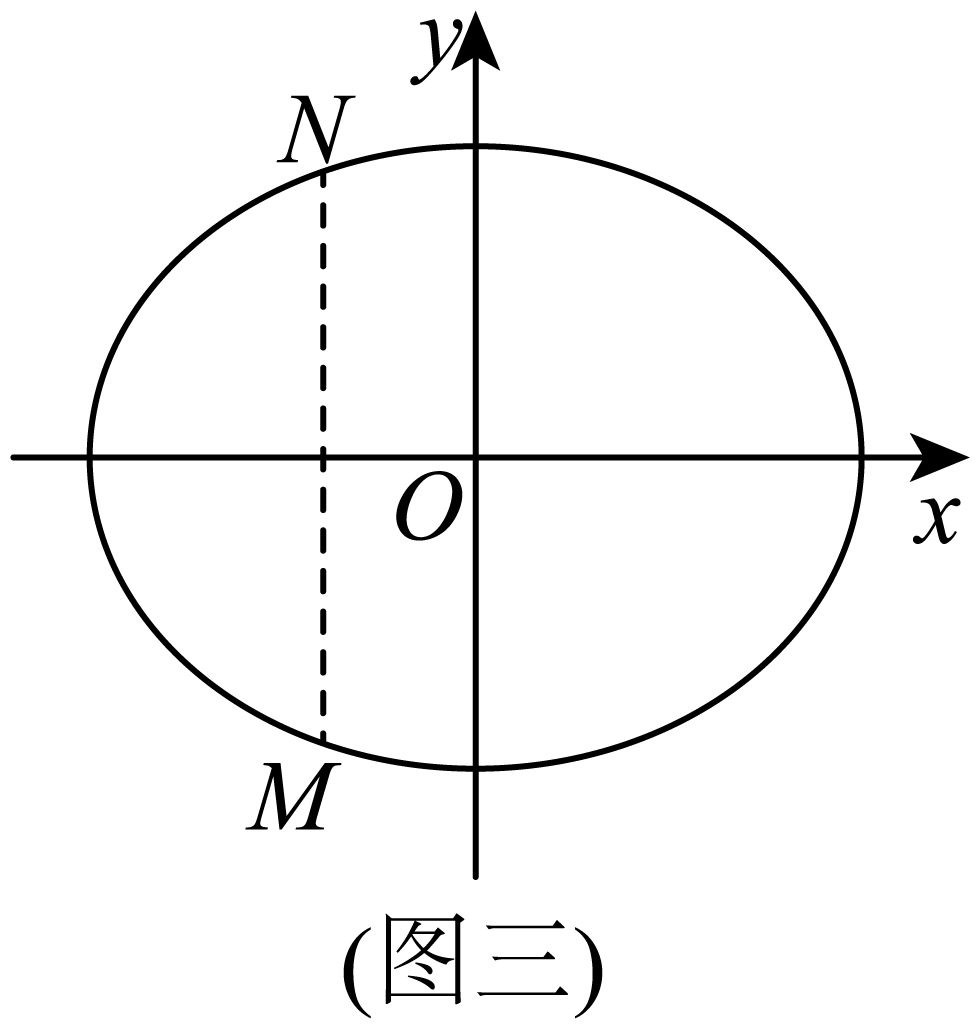
【答案】B

【解析】

【分析】根据条件，确定椭圆的长轴长和椭圆上一点，求出再求，可得椭圆的离心率.

【详解】





如图：

（图一）为空间几何体的直观图，（图二）为平面截空间几何体的剖面图，（图三）为以椭圆长轴所在直线为轴，长轴中垂线为轴的平面图形.

易得(图二)中线段的长为椭圆长轴长，不妨设圆锥底面半径为2，则由题意可知为正三角形，，，

所以，所以，所以，所以

所以（图三）中，将代入中解得，

所以，所以.

故选：B

**二. 选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 是随机变量，（ ）

A. 若，则，

B. 若，则

C. 若，则，

D. 若，则

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据随机变量的数字特征进行判断.

【详解】因为，则,故A正确;

因为,则,故B正确；

因为,则,故C正确；

因为,

则,故D错误.

故选：ABC

10. 已知正方体的棱长为1，则（ ）

A. 直线与所成角的正弦值为

B. 直线与平面所成角正弦值为

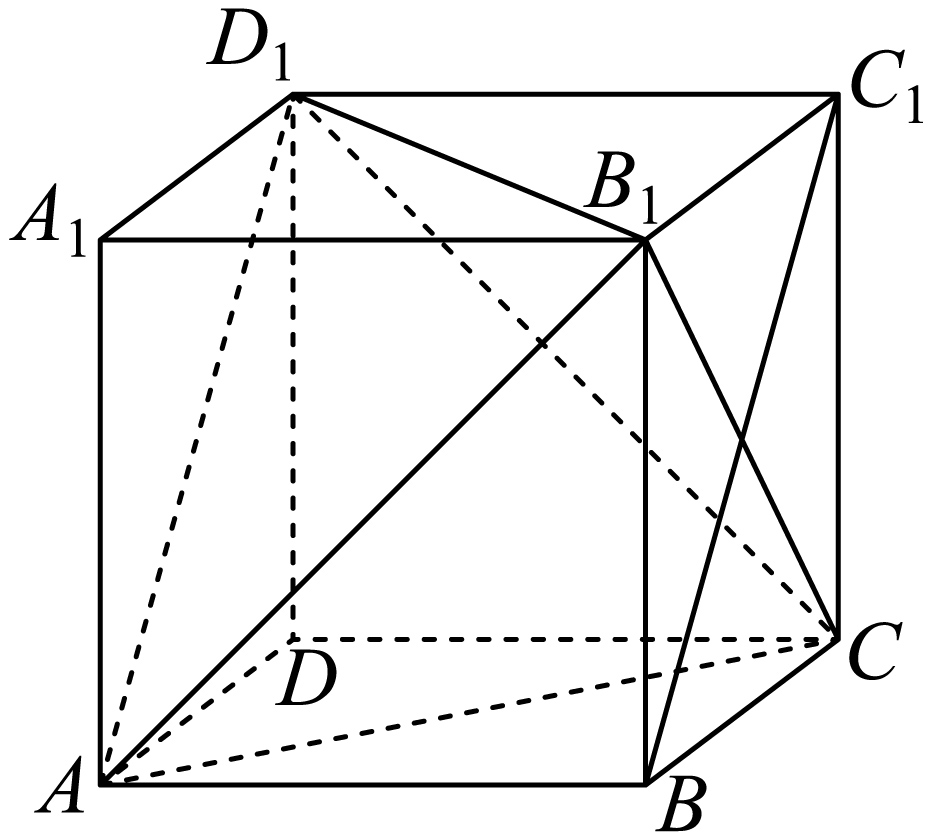
C. 点到直线的距离为

D. 点到平面的距离为

【答案】BC

【解析】

【分析】由正方体的结构特征及性质易得且、为等边三角形、为正四面体，进而判断各项正误.

【详解】

由正方体的结构特征及性质易得，且，故，

显然直线与所成角的正弦值不为，A错；

由正方体的结构特征及性质易得，即为等边三角形，

所以点到直线距离为，C对；

同上易得为正四面体，且棱长为，

所以点到平面的距离为，D错；

直线与平面所成角的正弦值为，B对.

故选：BC

11. 已知点，在双曲线：上，点是线段的中点，则（ ）

A. 当时，点，在双曲线的同一支上

B. 当时，点，分别在双曲线的两支上

C. 存在点，，使得成立

D. 存在点，，使得成立

【答案】ABC

【解析】

【分析】分类谈论，对直线是否存在斜率的时候，讨论弦的中点问题.

【详解】若直线不存在斜率，设直线方程为：，代入得：，

当或时，是弦的中线，此时，关于轴对称，且在双曲线的同一支上，；

若直线存在斜率，设直线方程：代入得：

，整理得：.

因为直线与双曲线有两个不同的交点，所以：

且

所以：

设，，则，

由，所以：



或.故D不成立；

又

当时，，，两点分别在双曲线的两支上；

当时，，，两点在双曲线的同一支上.

故AB成立；

当时，，可使命题成立，故C正确.

故选：ABC

12. 已知函数，则（ ）

A. 当时，是的极小值

B. 当时，是的极大值

C. 当时，

D. 当时，

【答案】ABD

【解析】

【分析】先证明在上有，，，再利用零点存在性定理和隐零点法，结合导数逐一分析判断各选项，从而得解.

【详解】先证明出以下结论，在上有，，

，

令，，则，其中

令，则，其中，

令，则，其中，

令，则在上恒成立，

故在单调递减，

又，故在上恒成立，

故在单调递减，

又，故在上恒成立，故，

所以在上单调递减，

又，故在上恒成立，

故在上单调递减，且，

故，

同理可证，证毕.

A选项，，，，

当，时，恒成立，

故在上单调递减，

当时，，

对任意的，总存在，使得，

故当时，是的极小值，A正确；

B选项，时，，

则，

其中，

令，

则，其在上单调递减，在上单调递增，

其中，，，

由零点存在性定理可知，存在，，使得，

当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

又，且，

故当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

所以是的极大值，B正确；

D选项，当时，，

令，则，

令，则，

显然在上单调递减，

其中，，

则由零点存在性定理可得，存在，使得，

当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

又，，

下面证明，

由可知，，

由可得，

所以，

由零点存在性定理可得，存在，使得，

当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

又，故当时，，D正确；

C选项，令，即，解得，

下面证明，即证，

由得，，

由得，，

故，

故当时，存在，使得，C错误.

故选：ABD.

【点睛】结论点睛：麦克劳林展开式常常用于放缩法进行比较大小，常用的麦克劳林展开式如下：

，，

，

，

，.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 已知向量，，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据向量数量积运算得解.

【详解】，

.

故答案为：.

14. 已知数列是首项为25，公差为的等差数列，则数列的前30项的和为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】458

【解析】

【分析】由已知求出数列的通项与前项和，数列的前30项的和为，求值即可.

【详解】数列是首项为25，公差为的等差数列，

则有，数列的前项和，

若，则且，

数列的前30项的和

.

故答案为：458

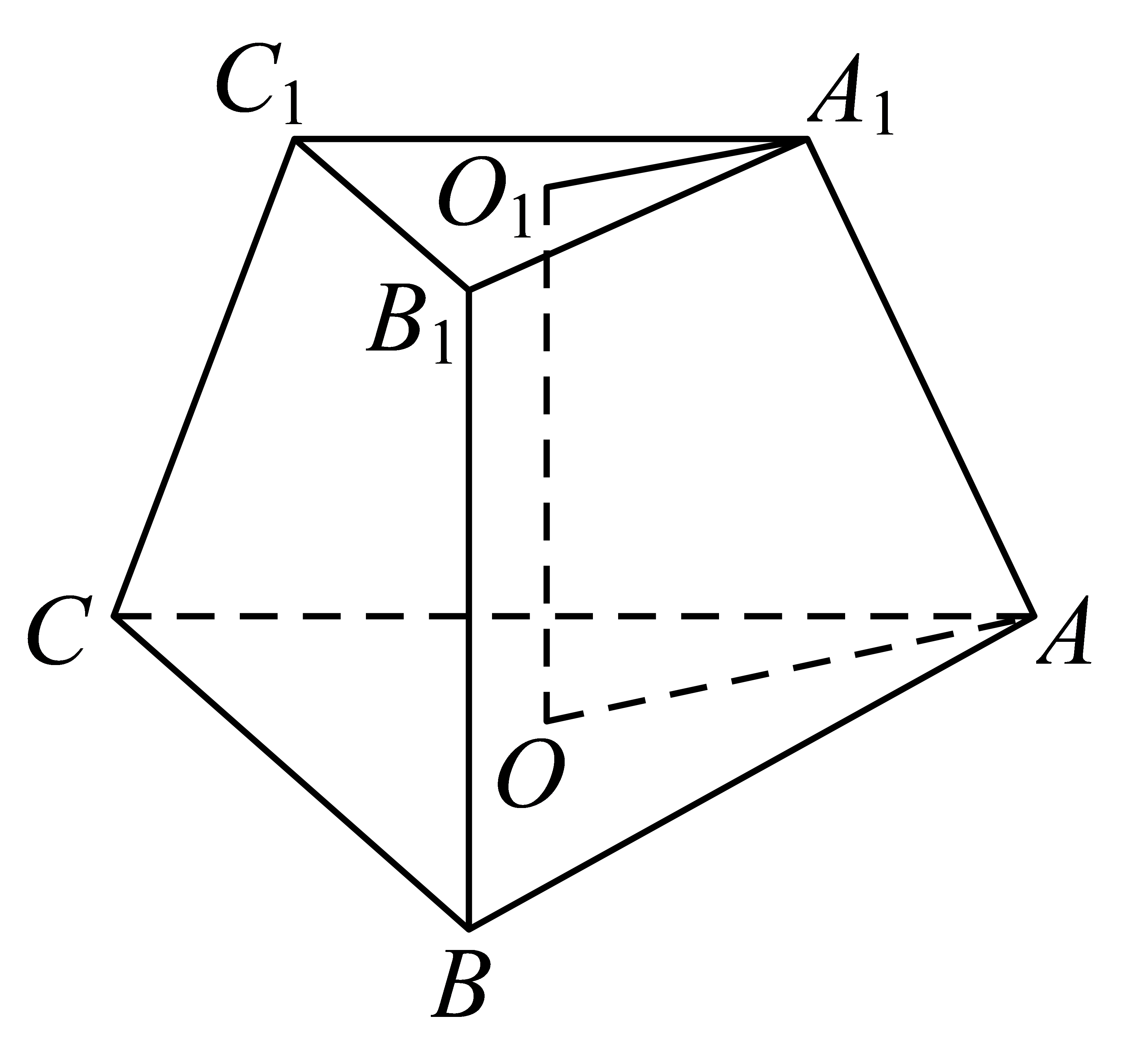
15. 在正三棱台中，，，，则该棱台的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】由条件求出正三棱台的高，再利用台体体积公式计算体积.

【详解】如图，分别取和的重心，，连接，，，



因为正三棱台中，，，

所以，，，，

又因为四边形为直角梯形，，且，

所以，

正三棱台的体积.

故答案为：.

16. 点在圆上，点在抛物线上，则线段长度的最小值为\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】先求出圆心和半径，再由两点间距离公式和配方法求出即可.

【详解】圆的圆心，，

设，

则，

故答案为：

**四. 解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

17. 的内角，，的对边分别为，，.已知.

（1）求；

（2）若，求.

【答案】（1）；

（2）.

【解析】

【分析】（1）由正弦边角关系有，应用余弦定理求角；

（2）由（1）及正弦边角关系得，且，，结合三角恒等变换求角的大小.

【小问1详解】

由题设及正弦边角关系可得：，则，

而，且，则.

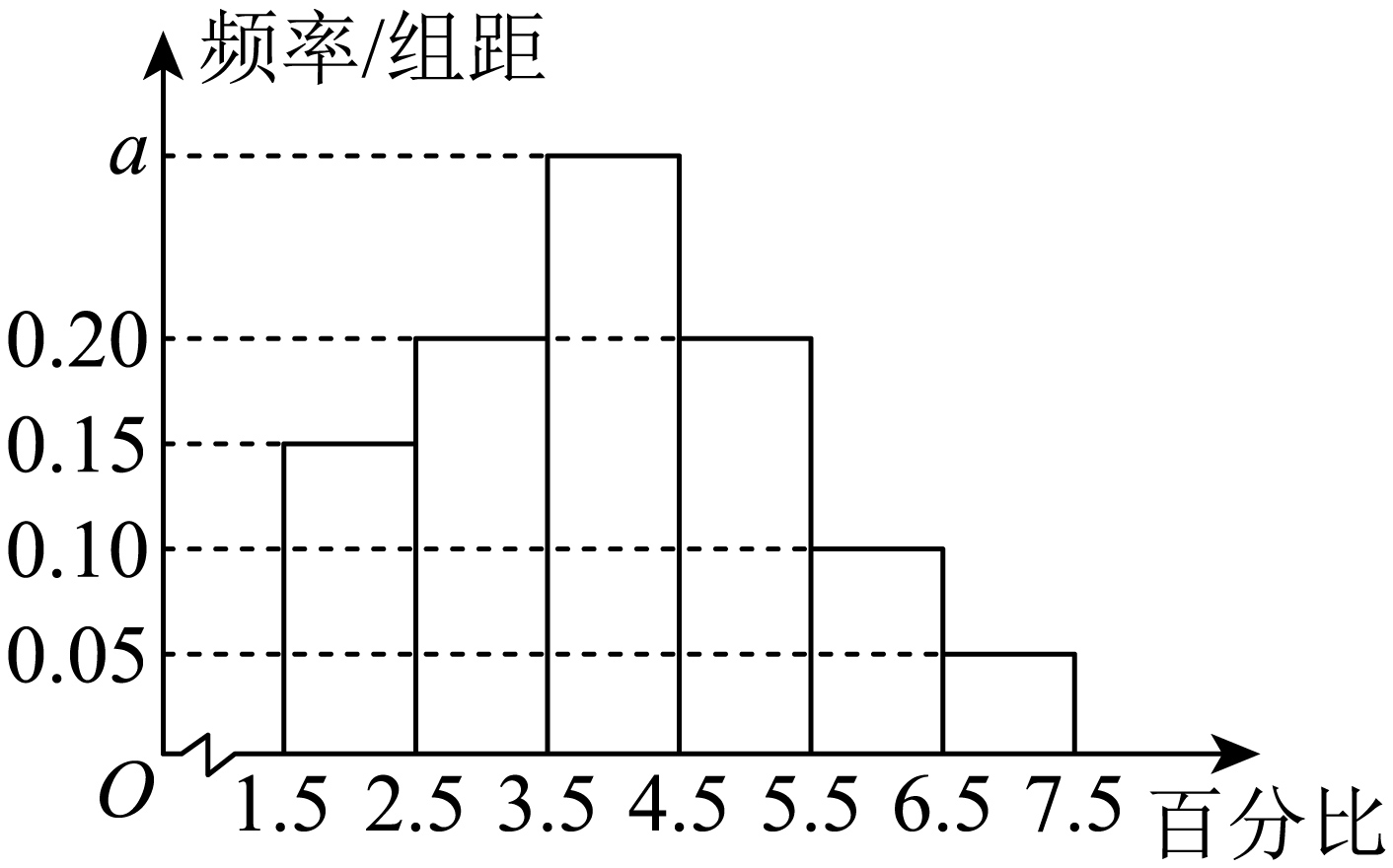
【小问2详解】

由题设，且，，

所以，则，

所以，则，即.

18. 为了解某药物在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：随机抽取100只小鼠，给服该种药物，每只小鼠给服的药物浓度相同、体积相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内药物的百分比. 根据试验数据得到如下直方图：



（1）求残留百分比直方图中的值；

（2）估计该药物在小鼠体内残留百分比的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）在体内药物残留百分比位于区间的小鼠中任取3只，设其中体内药物残留百分比位于区间的小鼠为只，求的分布列和期望.

【答案】（1）；

（2）；

（3）分布列见解析，.

【解析】

【分析】（1）根据频率之和等于1列式求解即可；

（2）根据直方图计算平均数的公式计算可得；

（3）先根据百分比在区间和上的小鼠个数，根据超几何分布概率公式求概率，即可的分布列，然后可得期望.

【小问1详解】

由题知，，

解得.

【小问2详解】

由图知，

【小问3详解】

体内药物残留百分比位于区间内的频率为，位于内的频率为.

则百分比位于区间内的小鼠有10只，位于内的小鼠有5只，

*X*的所有取值为0,1,2,3，

所以，，

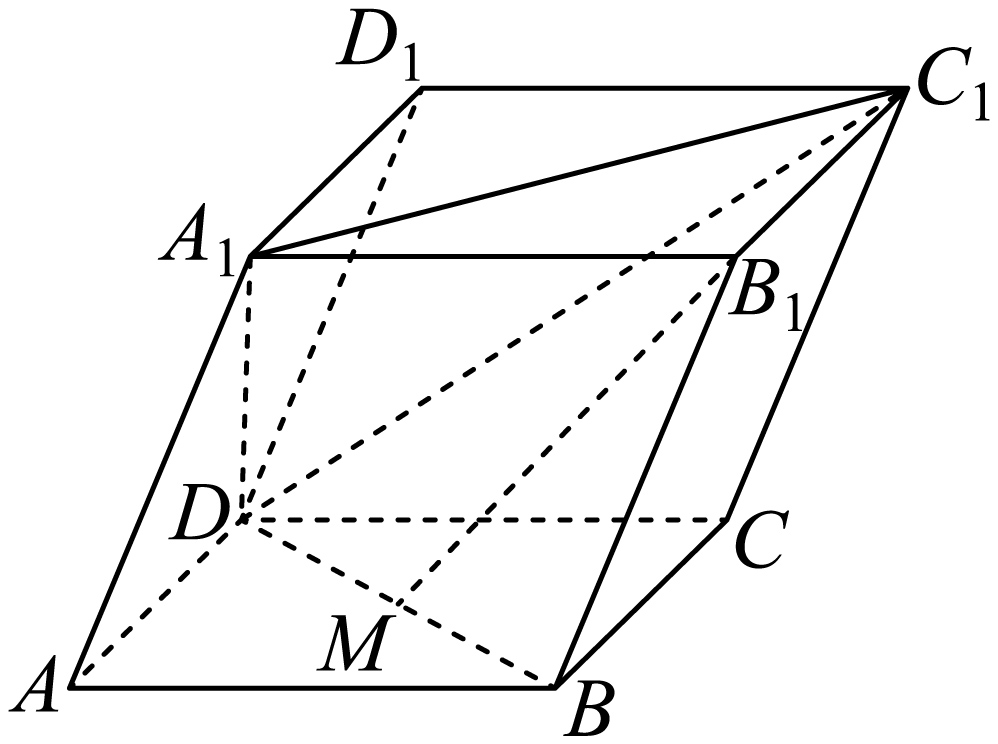
，，

所以，的分布列如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

由期望公式得.

19. 如图，在平行六面体中，，，，，点为中点.



（1）证明：平面；

（2）求二面角的正弦值.

【答案】（1）证明见详解

（2）

【解析】

【分析】（1）以为原点建立空间直角坐标系，写出各点坐标，写出各向量即可根据向量法证明；

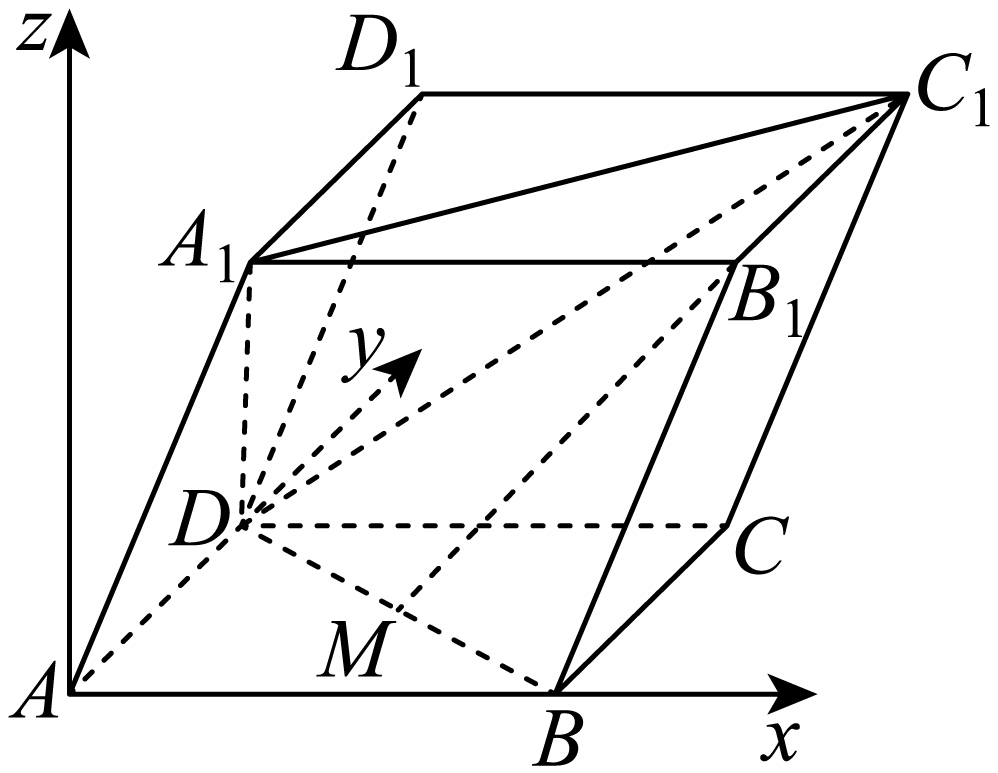
（2）利用向量法求出二面角的余弦值即可求出正弦值.

【小问1详解】

因为，所以，所以在的投影数量为，

因为，所以，所以在的投影数量为，

以为原点建立如图所示的坐标系，



所以，，，，，，

所以，，，

设面的法向量为，

所以，令，所以，

因为，不在面内，所以平面；

【小问2详解】

，所以，

设面的法向量，

因为，所以，

令，则，

设面的法向量，

因为，所以，

令，所以，所以，

所以二面角的正弦值为.

20. 记数列的前项和为，数列的前项和为. 已知，.

（1）求的通项公式；

（2）求证：.

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据，注意验证当时也成立，即可求解；

（2）由（1）和得，讨论当时，，当时，，得，再利用错位相减即得.

【小问1详解】

当时，，

当时，，

经验证：当时也成立.

所以的通项公式为：.

【小问2详解】

由（1）得，

又，

当时，，满足，

当时，，

所以当时，，

令，

则，

两式相减得：



，

所以，

所以，

即.

【点睛】本题证明数列不等式，其常用方法有：

（1）利用二项式定理的展开式，进行简单的放缩；

（2）利用放缩法，注意放缩技巧和放缩的适度；比如：添项或舍去一些项；将分子和分母放大或缩小；真分数的性质；利用基本不等式；函数的有界性；绝对值不等式.

（3）利用导数法，应准确构造相应的函数，注意数列中相关限制条件的转化.

（4）利用数学归纳法与放缩法结合.

21. 在平面直角坐标系中，已知点，，点满足. 记的轨迹为.

（1）求的方程；

（2）已知点，设点，在上，且直线不与轴垂直，记，分别为直线，的斜率.

（ⅰ）对于给定的数值（且），若，证明：直线经过定点；

（ⅱ）记（ⅰ）中的定点为，求点的轨迹方程.

【答案】（1）

（2）（ⅰ）证明见解析；（ⅱ）（除去点）

【解析】

【分析】（1）根据椭圆的定义，写出点*P*的轨迹方程；

（2）设直线*MN*的方程，与椭圆方程联立，得，，用*k*表示*m*，可得直线所过定点，消去定点中的参数，得*Q*点的轨迹方程.

【小问1详解】

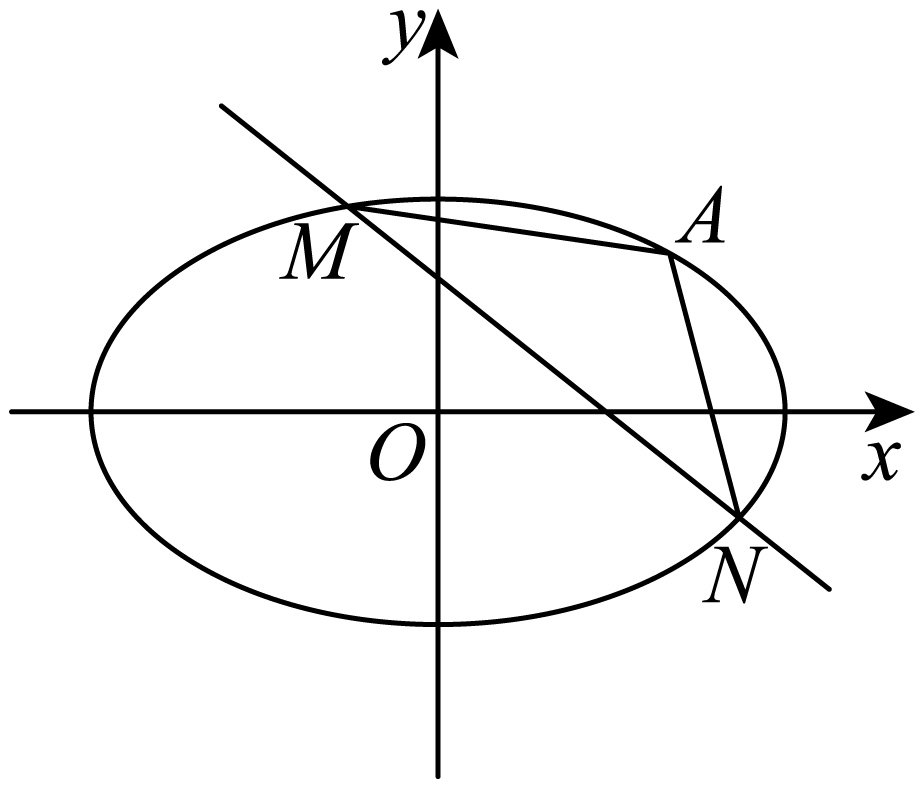
因为，

所以*P*的轨迹是以，为焦点的椭圆，设方程为，

则，，，所以，，

*C*的方程为.

【小问2详解】



设直线*MN*的方程为：，其中，

点*M*，*N*满足，即，满足，

则，且，.

（ⅰ）证明：因为，

所以，得，

直线*MN*的方程为：，

所以直线过定点.

（ⅱ）由，得（其中），

所以点*Q*的轨迹方程为直线（除去点）.

【点睛】关键点睛：设直线*MN*的方程为：，因为要证明过定点，所以需要建立*m*和*k*之间的关系式，在方程中消去一个，可得直线所过定点.

22. （1）已知函数及其导函数的定义域均为，设是曲线在点处的切线的方程. 证明：当是增函数时，

（2）已知，设的最大值为，证明：.

（参考数据：，，）

【答案】证明见解析.

【解析】

【分析】（1）利用导数的几何意义，构造差函数根据导数研究函数的单调性求最值即可；

（2）同（1）先构造差函数结合隐零点确定，再根据（1）的结论及隐零点的范围证明即可.

【详解】（1）由题意可知，

令，则，

显然，

易知，

由，且是增函数，

所以时，，时，，

即在上单调递减，在上单调递增，故，

故；

（2）设，则，

易知在上单调递增，，

故使得，即，

则时，，时，，

所以在上单调递减，在上单调递增，

即，

故，

在的切线方程，

由（1）的结论可知，当且时取得等号，

故，

又，所以单调递减，即，

注意到.

故.

【点睛】本题第二问关键在于先构造差函数，利用隐零点确定，

再结合（1）的结论适当放缩证明不等式即可，但结果的精度较高，需要多加练习总结取点思路技巧.